ANÁLISIS DIMENSIONAL Y SEMEJANZA DINÁMICA

PROTOTIPOS Y MODELOS

- Los procedimientos analíticos basados en las ecuaciones generales de la mecánica de los fluidos, no permiten resolver, adecuadamente, todos los problemas que se presentan en esta área del conocimiento.
- Por ello se deben utilizar procedimientos experimentales, que combinados con las ecuaciones analíticas den una respuesta real a la situación estudiada.
- Por otra parte, frecuentemente, no es posible técnicamente y económicamente realizar ensayos con el objeto que se planifica, el prototipo. Por ejemplo: una represa, un buque, un puerto, etc.
- La parte experimental se realiza en modelos, es decir en una copia lo más fiel posible al prototipo y , normalmente, a un tamaño reducido respecto al original.

COPIA FIEL

Una copia fiel debe cumplir dos requisitos:

1. Similitud geométrica.
   -Todas las longitudes se deben reducir (o amplificar) en la misma proporción.
   Si el subíndice p se refiere al prototipo y el m al modelo, las longitudes x, y, z deben, entre modelo y prototipo estar relacionadas de la siguiente manera:

$$\frac{X_m}{X_p} = \lambda \qquad \frac{Y_m}{Y_p} = \lambda \qquad \frac{Z_m}{Z_p} = \lambda$$

λ es la escala

Si fuera una superficie

$$\frac{X_p}{X_m}\frac{Y_P}{Y_m} = \lambda^2$$

Para un volumen

$$\lambda^3$$

2. Similitud dinámica.

   No basta que entre modelo y prototipo exista una similitud geométrica para que haya una correspondencia en su comportamiento.

   Por ejemplo una maqueta de un edificio es sólo geométricamente semejante, sin embargo ante un movimiento sísmico se comporta de forma muy diferente.

   Se requiere de una similitud DINÁMICA.

   Esto significa que existiendo una similitud geométrica, debe producirse una relación fija entre fuerzas, esfuerzos, velocidades, aceleraciones, etc.

   Esto se logra mediante el empleo de uno o varios parámetros adimensionales que agrupan a las variables que intervienen en el fenómeno en estudio.

PROCEDIMIENTOS EXPERIMENTALES

En un proceso experimental, donde intervienen varias variables, se procede a efectuar ensayos bajo distintas condiciones operación, y observar como cada variable influye en el fenómeno que se analiza.

Para tener claridad sobre esto se modifica uno de los factores cada vez, de tal manera de, inequívocamente, observar los efectos que esa particular variable produce.

Para tener una visión completa cada variable se debe modificar el mayor número de veces posible. Pero esto produce dificultades en la realización de los experimentos.
Observe:

Si las variables en juego son, por ejemplo, 6 y cada una de ellas se hace variar 10 veces, se tiene:

Variable 1 10 distintas
Variable 2 10
Para cada una de estas últimas se deben variar 10 veces la variable 1

El número de ensayos hasta el momento es de $10^2 = 100$

Para las 6 variables el número de ensayos es de $10^6 = 1.000.000$

PROBLEMAS:

- **Encontrar o generar fluidos que manteniendo, por ejemplo, su densidad tengan distinta viscosidad, o a la inversa.**
- **Efectuar ese millón de ensayos.**
- **Procesar la información del millón de ensayos.**
- **Descubrir en toda esa información las leyes que los rigen.**

¿Como se resuelve este problema?

Si se utilizan parámetros adimensionales se puede reducir el número de ensayos y las dificultades en encontrar tantos fluidos distintos.

En el caso mencionado, con 6 variables se pueden establecer tres parámetros dimensionales probablemente.

Entonces el número de ensayos será de

$$10^3 = 1000$$

Valor notablemente mejor que el anterior

Fluidos diversos. Como los parámetros adimensionales reúne a dos o más variables, es factible variar el parámetro sin modificar alguna característica del fluido.
Por ejemplo:

$$R_D = \frac{V\,D\,\rho}{\mu}$$

Se puede variar el Nº de Reynolds, R_D, modificando la velocidad del fluido, que es bastante simple de efectuar, sin tener que modificar su densidad, ρ, o su viscosidad, μ.

EN RESUMEN:

1. Para establecer la similitud geométrica se emplea un parámetro adimensional que es la relación de longitud entre prototipo y modelo:
$$\lambda$$
2. Para establecer la similitud dinámica se emplean, también, parámetros adimensionales, que en forma genérica se llaman:
$$\pi$$
3. Para resolver la problemática que impone la experimentación se emplean parámetros adimensionales, que en forma genérica, también, se llaman:
$$\pi$$

ANALISIS DIMENCIONAL

El análisis dimensional es el proceso que permite determinar:

- la dimensión de una variable y
- obtener los parámetros adimensionales que rigen a un fenómeno.

Dimensiones de las magnitudes físicas:

La dimensión de las magnitudes físicas corresponden a siete básicas y a un gran número de derivadas que son una combinación de las básicas.

- Dimensiones básicas:
  - **Longitud** **L**
  - **Masa** **M** **o** **Fuerza** **F**
  - **Tiempo** **T**
  - Temperatura q
  - Tensión V
  - Corriente I
  - Luminosidad C

- Dimensiones derivadas:

  Por ejemplo

$$Velocidad = \frac{Distancia}{tiempo} = V = \frac{D}{t} \qquad Dim.Velocidad = Dim\ V = \frac{L}{T}$$

$$Presión\ p = \frac{F}{A} \qquad Dim\ p = \frac{F}{A} = \frac{M\ L}{T^2\ L^2} = \frac{M}{L\,T^2} = M\ L^{-1} T^{-2}$$

$$Viscisidad = \mu = \frac{\tau}{\frac{\delta V}{\delta Y}} = \frac{\tau\ \delta Y}{\delta V} \qquad Dim\ \mu = \frac{F\ L}{L^2\ \frac{L}{T}} = \frac{F\ L\,T}{L^3} = \frac{M\ L\,L\,T}{L^3\ T^2} = \frac{M}{L\,T} = M\ L^{-1} T^{-1}$$

Tipos de variables

Cuando se estudia un fenómeno es necesario determinar las variables importantes que rigen dicho fenómeno, para ello es bueno guiarse por los tipos de variables que se indican a continuación:

- Geométricas
  - Longitudes
  - Diámetros
  - Rugosidad
  - Áreas
  - Momentos de inercia,..

- Cinemáticas
  - Velocidades lineales, angulares, rotacionales.
  - Caudal volumétrico y másico
  - Aceleraciones lineales, angulares,…

- Dinámicas
  - Propiedades del fluido
    - Densidad
    - Peso específico
    - Viscosidad
    - Tensión superficial..
  - De comportamiento
    - Variación de presión
    - Potencia
    - Torque
    - Resistencia
    - Energía por unidad de masa

Teorema π de Buckingham

Este teorema, también llamado de Churchill, se emplea para determinar los parámetros adimensionales.
Si en un fenómeno intervienen n variables y emplean r dimensiones básicas el Nº de parámetros adimensionales que se pueden formar es de

$$n - r = m$$

Cada parámetro se denominará π :

$$\pi_1, \ \pi_2, \ \pi_3, \ldots\ldots \ \pi_m$$

Y cada uno de ellos se forma con m variables que se repiten y una de las restantes en cada parámetro adimensional.

Ejemplo:

La pérdida de carga, hp, se cree que depende de la longitud de la tubería, l, de su diámetro, D, de su rugosidad interna, e, de la velocidad del flujo, V, de la densidad, ρ, y viscosidad del fluido, μ.

Funcionalmente:

$$hp = f\left(l, D, e, \mathrm{V}, \rho, \mu\right)$$

Se tienen 7 variables, n, que emplean 3 dimensiones básicas, r, en consecuencia

$$m = n - r = 7 - 3 = 4$$

Se formarán 4 parámetros adimensionales:

$$\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \quad \pi_4$$

Dimensiones de cada variable:
Se indica en cada casillero el exponente de la dimensión básica señalada en la primera fila

	L	M	T	Observaciones
Hp	2	0	-2	Como es la incógnita no se repite
μ	-1	1	-1	No se repite porque basta que figure en un solo parámetro
ρ	-3	1	0	Variable de repetición
V	1	0	-1	Variable de repetición
D	1	0	0	Variable de repetición
L	1	0	0	No se repite porque porque ya esta D
E	1	0	0	No se repite porque porque ya esta D

Entonces:

$$\pi_1 = V^x D^y \rho^z \, hp^1 \qquad \pi_2 = V^1 D^u \rho^v \, \mu^w \qquad \pi_3 = V^a D^b \rho^c \, l^1 \qquad \pi_4 = V^d D^f \rho^g \, e^1$$

A una variable de cada parámetro se le ha otorgado un exponente 1, en el caso de π_1 se le ha dado a la incógnita principal para su fácil despeje. En los otros casos se puede otorgar arbitrariamente a cualquier variable.
Determinación de los exponentes:

Se reemplazan las variables por sus dimensiones:

$$\pi_1 = (L^x T^{-x})(L^y)(L^{-3z} M^z)(L^2 T^{-2})$$

$$\begin{aligned} &Para: \\ &L: \quad x + y - 3z + 2 = 0 \\ &T: -x \quad -2 = 0 \\ &M: \quad z = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo: x = -2 y = 0 z = 0

$$\pi_1 = \frac{hp}{V^2}$$

$$\pi_2 = (L^1 T^{-1})(L^u)(L^{-3v} M^v)(M^w L^{-w} T^{-w})$$

$$\begin{array}{ll} Para: & \\ L: & 1+u-3v-w = 0 \\ T: & -1 \quad -w = 0 \\ M: & v+w = 0 \end{array}$$

Resolviendo: u = 1 v = 1 w = -1

$$\pi_2 = \frac{V\,D\,\rho}{\mu}$$

$$\pi_3 = (L^a T^{-a})(L^b)(L^{-3c} M^c)(L^1)$$

$$\begin{array}{ll} Para: & \\ L: & 1+a+b-3c = 0 \\ T: & -a = 0 \\ M: & c = 0 \end{array}$$

Resolviendo: a = o b = -1 c = 0

$$\pi_3 = \frac{l}{D}$$

$$\pi_4 = (L^d T^{-d})(L^f)(L^{-3g} M^g)(L^1)$$

$$\begin{array}{ll} Para: & \\ L: & 1+d+f-3g = 0 \\ T: & -d = 0 \\ M: & g = 0 \end{array}$$

Resolviendo: d = o f = -1 g = 0

$$\pi_4 = \frac{e}{D}$$

Volviendo a la expresión general

$$hp = \pi_1 V^2 (\pi_2 , \pi_3 , \pi_4)$$

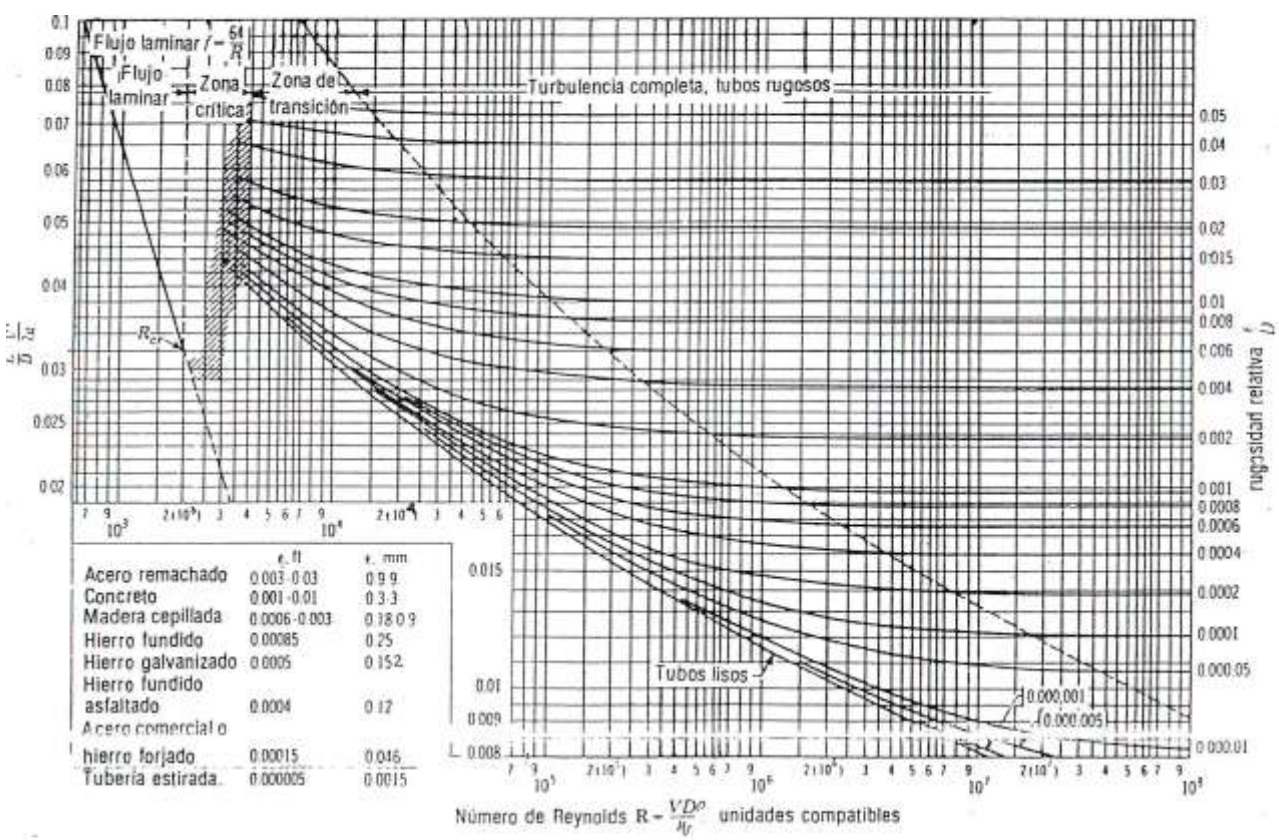
$$hp = \pi_1 V^2 \left(\frac{V\,D\,\rho}{\mu} , \frac{l}{D} , \frac{e}{D} \right)$$

Realizados los ensayos para determinar la relación entre variables se establece que:

$$hp = f\ \frac{l}{D} \frac{V^2}{2g} \quad \left[m_{columna\,de\ fluido} \right]$$

Donde f es una función de

$$\frac{V\,D\,\rho}{\mu} = N^{o}\ de\ \mathrm{Re}\,ynolds = R_D \qquad \text{y de} \qquad \frac{e}{D} = rugosidad\ relativa$$



USO DE LOS PARÁMETROS ADIMENSIONALES.

Ejemplo 1:
Para una turbomáquina los parámetros adimensionales que la rigen son:

$$\pi_1 = \frac{Q}{n D^3} \qquad \pi_2 = \frac{H}{n^2 D^2} \qquad \pi_3 = \frac{N}{\rho n^3 D^5}$$

Se tiene una bomba que mueve 75 [m^3/h], con una altura de 35 [m_{ca}] y consume una potencia de 13,3 [hp], cuando opera a 2900 [rpm] y con un diámetro exterior del rodete de 180 [mm].

¿Cuáles son sus condiciones de operación a 3550 [rpm] y con el rodete reducido a 170 [mm] de diámetro?

Tratándose de la misma máquina que opera bajo otras condiciones se da la similitud geométrica y dinámica, entonces se debe cumplir que los parámetros adimensionales correspondientes tienen el mismo valor. Si el subíndice 1 corresponde a las condiciones iniciales y 2 a las finales, se tiene:

$$\frac{Q_1}{n_1 D_1^3} = \frac{Q_2}{n_2 D_2^3} \qquad \frac{H_1}{n_1^2 D_1^2} = \frac{H_2}{n_2^2 D_2^2} \qquad \frac{N}{\rho_1 n_1^3} = \frac{N_2}{\rho_2 n_2^3 D_2^5}$$

Entonces:

$$Q_2 = Q_1 \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 = 75\frac{3550}{2950}\left(\frac{170}{180}\right)^3 = 76{,}03 \quad \left[\frac{m^3}{h}\right]$$

$$H_2 = H_1\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 = 35\left(\frac{3550}{2950}\right)^2\left(\frac{170}{180}\right)^2 = 45{,}20 \quad [m_{ca}]$$

$$N_2 = N_1\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^3\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^5 = 13{,}3\left(\frac{3550}{2950}\right)^3\left(\frac{170}{180}\right)^5 = 17{,}41 \quad [hp]$$

Ejemplo 2:
Se tiene una longitud de la ola L_0 de 19,118 [m]

Las relaciones que rigen a las olas son:

$$\frac{d}{L_0} = \frac{2\pi\, d}{gT^2} \qquad\qquad Fr = \frac{V^2}{gL_0}$$

d	es la profundidad	Fr	Nº de Froud
L_0	longitud de la ola		
T	período de la ola		
V	velocidad de la ola		

Despejando T $\qquad T = \sqrt{\frac{2\pi\, L_0}{g}} = \sqrt{\frac{2\pi 19{,}118}{9{,}80665}} = 3{,}5[s]$

Entonces la velocidad de la ola es:

$$V = \frac{L_0}{T} = \frac{19{,}118}{3{,}5} = 5{,}462\left[\frac{m}{s}\right]$$

El Nº Froud que tiene es de:

$$Fr = \frac{V^2}{g\,L_0} = \frac{5{,}462^2}{9{,}80665\;19{,}118} = 0{,}1592[-]$$

El modelo de este fenómeno esta a una escala 1:40

$$\lambda = \frac{L_{0p}}{L_{0m}} = \frac{40}{1}$$

La longitud de onda de la ola del modelo es:

$$L_{0m} = \frac{L_{0p}}{\lambda} = \frac{19{,}118}{40} = 0{,}478 \;\; [m]$$

Y para que se mantenga la similitud

$$Fr_p = Fr_m = 0{,}1592 = \frac{V^2}{9{,}80665\;0{,}478} \qquad\qquad V = 0{,}863\left[\frac{m}{s}\right]$$

El período del modelo:

$$T_m = \sqrt{\frac{2\pi\, L_{0m}}{g}} = \sqrt{\frac{2\pi\, 0{,}478}{9{,}80665}} = 0{,}553\,[s]$$